وزارة التعليم العالي — الامتحان النهائي — الاسم:

جامعة البعث — لمقرر تحليل (2)- السنة الأولى رياضيات — الدرجة 100

كلية العلوم — الفصل الأول لعام 2014- 2015 — المدة ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة التالية :

السؤال الأول (24درجة) : أكتب الجواب النهائي لقيم التكاملات الآتية :

$$1 - I = \int \ln|x|\, dx \qquad , \qquad 2 - I = \int \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$3 - I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} \quad , a \neq 0$$

السؤال الثاني (26درجة) : أحسب قيمة التكاملات الآتية :

$$1 - I = \int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}\, dx \qquad , \quad 2 - I = \int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

السؤال الثالث (26درجة) : (أ) أحسب التكامل المحدد الآتي بعد التأكد من وجوده :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$$

(ب) أوجد طول المنحني المعطى بالمعادلات الآتية :

$$x = \cos^3\theta \quad , \quad y = \sin^3\theta \quad , \; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

السؤال الرابع (24درجة) : أدرس تقارب أو تباعد التكاملين المعتلين الآتيين وعين القيم في حال التقارب .

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \qquad , \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$$

انتهت الأسئلة

حمص في 2015/2/1 — مع أطيب الأمنيات بالتوفيق والنجاح

مدرسا المقرر

د. منير مخلوف

د. نجوى الجيجكلي

د. نجوى الجبالي

٤

سلم تصحيح تحليل 2

سنة أولى رياضيات

السؤال الأول:

- $I=\int \ln|x|\,dx$

نضع: $\ln|x|=t \rightarrow x=e^{t} \Leftarrow dx=e^{t}dt$

$$I=\int \ln|x|\,dx=\int t\,e^{t}dt=\begin{pmatrix} u=t \to du=dt \\ dv=e^{t}dt \to v=e^{t}\end{pmatrix}=te^{t}-\int e^{t}dt$$

$$=te^{t}-e^{t}=\boxed{x(\ln|x|}$$

- $I=\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

نضع: $x=\sin t \Leftarrow I=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\,\cos t\,dt \Leftarrow$

$$I=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt=\int\cos^2 t\,dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\int\left[\frac{1}{2}dt+\frac{\cos 2t}{2}\right.$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+C=\boxed{\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{4}\sin 2(\arcsin x)+C}$$

- $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$

نضع: $t=x+\sqrt{x^2+a} \Leftarrow$

$$dt=dx+\frac{2x\,dx}{2\sqrt{x^2+a}}=dx+\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}}\Rightarrow\sqrt{x^2+a}\,dt=dx\left(\sqrt{x^2+a}+x\right)$$

$$dx=\frac{\sqrt{x^2+a}}{\sqrt{x^2+a}+x}dt\Rightarrow I=\int\frac{\sqrt{x^2+a}}{(\sqrt{x^2+a}+x)\sqrt{x^2+a}}dt=\int\frac{dt}{\sqrt{x^2+a}+x}=\int$$

$$\boxed{=\ln|t|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C}$$

السؤال الثاني :

$(-x^2-4x+5)' = -\frac{1}{2}(-2x-4)+(3-2) = x+3$

$(-2x-4) \qquad = -\frac{1}{2}(-2x-4)+1$

$I = \underbrace{-\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}}_{I_2} \quad , t = 5-4x-x^2 \rightarrow dt$

$I_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\sqrt{t} = -\sqrt{5-4x-x^2}$

$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2+4x-5+4-4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x+2)^2+9}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \arcsin\frac{x+2}{3}$

$I = -\sqrt{5-4x-x^2} + \arcsin\frac{x+2}{3} + C$

$- I = \int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx \; , \left(\begin{array}{l}\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3} \\ \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}\end{array}\right) \rightarrow t = x^{\frac{1}{12}} \rightarrow t^{12} = x$

بالتعويض والتكامل

$dx = 12t^{11}\,dt \longrightarrow I = 12\left[\frac{t^{18}}{18}+\frac{1}{14}t^{14}-\frac{1}{6}t^{6}\right]+C$

سلم تصحيح الامتحان النهائي

جامعة البعث

كلية العلوم - قسم الرياضيات   المقرر: تحليل ٢ / سنة أولى رياضيات   الدرجة : [illegible]

الفصل الأول للعام $\frac{2014}{2015}$ (الجزء الثاني)

جواب السؤال الثالث (أ): حساب التكامل: $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$ [illegible]

$\boxed{25}$ خمس وعشرون نقطة

إن التابع المكامل: $f(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1-x^2}}$ مستمرة على المجال $[0,1]$

وبالتالي تكون قابلة للمكاملة حسب مفهوم ريمان على هذا المجال، فالتكامل موجود

وبإجراء التحويل التالي: $x=\sin t$ ، فيكون: $dx=\cos t\,dt$

كما أن: $x=0 \Rightarrow t=0$, $x=1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2}$

وبالتالي التكامل المفروض:

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$$

يصبح بالشكل:

3 $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt$$

الآن إذا فرضنا من جديد أن: $t=\frac{\pi}{2}-u$ ، نجد أن: $dt=-du$

ومن أجل $t=0$ يكون: $u=\frac{\pi}{2}$

و $t=\frac{\pi}{2}$ يكون: $u=0$ وبالتعويض نحصل على:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\sin u}{\cos u+\sin u}\,du=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\cos u+\sin u}\,du$$

وعليه فإن:

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\,dt \Rightarrow$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t+\sin t}{\sin t+\cos t}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt=\frac{\pi}{2} \Rightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

السؤال الرابع: لدراسة تقارب أو تباعد التكامل المعتل:

$\boxed{24}$ أربع وعشرون علامة

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

نلاحظ أنه توجد للدالة المكاملة نقطة شاذة: $x=1$

لذلك نكتب التكامل المفروض بالصورة:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$$

ولكن:

/2

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{a\to 1^-} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}\lim_{a\to 1^-}\left[(a-1)^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}\right] = -\frac{3}{2}$$

أيضاً:

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{b\to 1^+} \int_b^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}\lim_{b\to 1^+}\left[(x-1)^{\frac{2}{3}}\Big|_b^4\right] = \frac{3}{2}(3)^{\frac{2}{3}}$$

أي:

$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{9}$$

فإن التكامل المفروض متقارب وقيمته تساوي:

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9} = \frac{3}{2}\left(-1+\sqrt[3]{9}\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{9}-1\right)$$

لدراسة تقارب أو تباعد التكامل المعتل:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+e^{-x})}$$

نلاحظ أنه من أجل: $x \geq 1$ يكون لدينا:

/2

$$x^2(1+e^{-x}) > x^2 \Rightarrow \frac{1}{x^2(1+e^{-x})} < \frac{1}{x^2}$$

ولكن:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\Big|_1^b\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b}+1\right] = 1$$

وبالتالي حسب اختبار المقارنة نجد أن التكامل المفروض متقارب.

ويمكن تطبيق اختبار نهاية النسبة فنحصل على نفس النتيجة.

مدرس المقرر:

د. منير مخلوف

(ج) إن المنحني المعطى هو الاستروئيد ولإيجاد طول هذا المنحني نوجد طول ربع المنحني

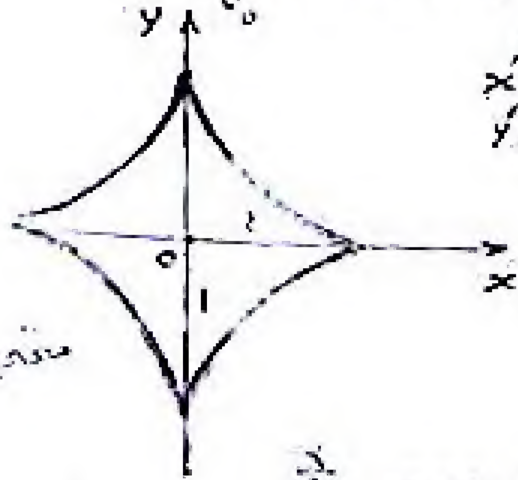
ونضرب الناتج بـ 4 حيث: $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ كما أنه منحني متناظر بالنسبة للمحاور

والمبدأ وبما أن الدوال $x(\theta)$ و $y(\theta)$ مستمرة وقابلة للمفاضلة فيكون

لهذا المنحني طول L يحسب بالقانون:

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}\, d\theta$$

ونحن لدينا:



منحني الاستروئيد

$$x'(\theta) = 3\cos^2\theta(-\sin\theta) = -3\sin\theta\cos^2\theta$$
$$y'(\theta) = 3\sin^2\theta(\cos\theta) = 3\sin^2\theta\cos\theta$$

وبالتالي فإن:

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}\, d\theta$$

ولكن:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9\sin^2\theta\cos^4\theta + 9\sin^4\theta\cos^2\theta}\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3|\cos\theta\sin\theta|\, d\theta = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cdot\cos\theta\, d\theta =$$

4

$$= \frac{3}{2}\left[\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{3}{2}(1-0) = \frac{3}{2}$$

$L = 4 \times \frac{3}{2} = 6$ وحدات طول

إذاً طول المنحني المعروض هو: $L = 6$ وحدة طول.